Sea $\mathbb{R}$ dotado de la relación de orden habitual y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de partes de $\mathbb{N}$ con la relación de orden (no total) inducida por la relación contención entre conjuntos. Encontrar una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que sea estrictamente creciente.

Solución: No existe tal función.

Razonemos por reducción al absurdo, y supongamos que existe una función que verifica las condiciones pedidas. Por monotonía tenemos que $f(x) \subset f(1), \forall x \in (0,1)$, luego

$$\bigcup_{x\in(0,1)} f(x) \subset f(1)$$

Ahora, por la monotonía estricta de f, para cada $x \in (0,1)$ podemos encontrar un $n_x \in f(x)$ tal que:

1)Dado $y \in (0,1)$, con $y < x$, se cumple que $n_x \notin f(y)$, pues $f(y) \subsetneq f(x)$.

2)Dado otro $y \in (0,1)$, si $y \neq x$, entonces $n_x \neq n_y$.

En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que $x > y$, entonces, tenemos que por 1) $n_x \notin f(y)$, pero $n_y \in f(y)$, luego $n_x \neq n_y$. Análogamente tenemos lo mismo si $y > x$ intercambiando los papeles de x e y en 1).

De lo anterior se deduce que

$$|\{n_y : y \in (0,1)\}| \geq |(0,1)| = \aleph_1$$

pero también tenemos que por 1)

$$\{n_y : y \in (0,1)\} \subset \bigcup_{x\in(0,1)} f(x) \subset f(1)$$

por tanto,

$$|f(1)| \geq \aleph_1$$

pero f(1) es un subconjunto de $\mathbb{N}$ luego,

$$|f(1)| \leq \aleph_0$$

lo que nos conduce a,

$$\aleph_0 \geq \aleph_1$$

que es absurdo.